

集合と論理

2020 年 4 月 6 日 (月)

この原稿では、大学で数学を学ぶための基礎である「集合」と「論理」について解説します。

1 集合

1.1 集合の復習

まずは集合の復習から始めます。数学における集合とは「もの」の「集まり」のことでした。ただし、ものの集まりであれば何でも良いということではなく、

どんなものをもってきても、それが集まりに属するか属さないかを客観的に判断できる …… (*)

場合に限ります。例えば、

- 自然数全体の集まり、負の整数全体の集まり

は集合です。これらの場合は、例えば 100 という数をもってきたときに、それが集まりに属するか属さないかを誰が判断しても同じ結論に到達します*1 (100 は前者の集まりには属しますが、後者の集まりには属しません)。しかし、

- 大きい数全体の集まり

は集合ではありません。なぜかという、この場合は 100 という数が集まりに属するか属さないかを客観的に判断することができないからです。上記の約束 (*) を満たしていれば、数だけでなく、関数の集まりや座標平面上の点の集まりなども集合として扱うことができます。

以上が数学における集合の復習です。上記の説明だとやや心もとないところもありますが、皆さんがこれから大学で数学を学ぶ上では十分だと思います。より詳しく「集合とは何か」を知りたい人は、公理的集合論という分野を調べてみてください。

1.2 集合の元と記号

集合を構成する「もの」のことを、その集合の「元」と呼びます（「要素」と呼ぶこともあります）。 S を集合とします*2。 a が S の元であることを、 $a \in S$ や $S \ni a$ と表します。また、 a が S の元でないことを $a \notin S$ や $S \not\ni a$ と表します。元を一つももたない集合を「空集合」といい、 $\emptyset$ という記号で表します。

次に、よく使われる集合を表す記号を紹介します。

- **N** 自然数全体の集合。 **N** は “Natural number” (自然数) の頭文字です。
- **Z** 整数全体の集合。 **Z** は “ganze Zahl” (ドイツ語で整数) から来ています。
- **Q** 有理数全体の集合。 **Q** は “Quotient” (商) の頭文字です。
- **R** 実数全体の集合。 **R** は “Real number” (実数) の頭文字です。

*1 「誰が判断しても同じ結論に到達する」ということが「客観的に判断できる」ということの意味です。

*2 英語では集合を “set” というので、集合を表すのに S という文字をしばしば使用します。

- **C** 複素数全体の集合. **C** は “Complex number” (複素数) の頭文字です.

上記の記号を用いれば, $1 \in \mathbf{N}$ や $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ のように表すことができます.

1.3 集合の表記

集合には以下の二通りの表記の仕方があります.

- (i) 元を書き並べる表記 (「外延的記法」とも言います). これは例えば,

$$\{a, b, c\}, \quad \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

のような表記のことです.

- (ii) 帰属の条件を明記する表記 (「内包的記法」とも言います). これは例えば,

$$\{n \mid 3 \leq n < 16, n \in \mathbf{N}\}$$

のような表記のことです*3.

(i), (ii) いずれの場合においても集合を表す際には中括弧 $\{ \}$ を使用します. また, (i), (ii) はどちらか一方のみ使えばよいというものではありません. 両方とも使えるようになってください. 理解を深めるために以下の練習問題に取り組んでみてください.

問 1.1. $f(x) = x^2 - 4$ とする. 以下の集合を (i) または (ii) の表記で表せ.

- (1) $f(x) < 0$ となる整数 x 全体の集合.
- (2) $f(x) < 0$ となる実数 x 全体の集合.
- (3) $f(x) < -10$ となる実数 x 全体の集合.

1.4 集合の包含

A, B を集合とします. A の “すべての” 元が B の元にもなっているとき, $A \subset B$ と表します.

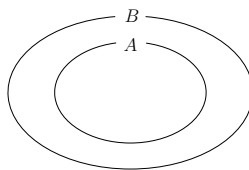


図1 $A \subset B$

いま, 「すべての」という言葉を使いましたが, 大学の数学では同じ意味で「任意の」という言葉を使う方が一般的です. 今後は, 「任意の」を使うことにします.

$A \subset B$ のとき, A は B の「部分集合」とであると言います. または, 「 A は B に含まれる」や「 B は A を含む」とも言います. 空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合と約束します.

*3 3 以上 16 未満の自然数の集合を表しています. この集合を $\{n \in \mathbf{N} \mid 3 \leq n < 16\}$ と書くこともあります.

例 1.2. $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ や $\emptyset \subset \mathbf{Z}$ となります。また、 $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}$ も正しいです。

以下の練習問題に取り組んでみてください。

問 1.3. (1) $\{1, 2, 3\} \subset \mathbf{N}$ は正しいか？

(2) $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbf{N}$ は正しいか？

(3) 整数 m に対して、集合 $\{mn \mid n \in \mathbf{Z}\}$ を $m\mathbf{Z}$ と書くことにする。このとき、 $-2\mathbf{Z} \subset 2\mathbf{Z}$ は正しいか？

次の問題で記号の使い方をもう一度確認してみてください。

問 1.4. 以下の記号の使い方は正しいか？

(1) $1 \subset \mathbf{R}$ (2) $\{1\} \in \mathbf{R}$ (3) $\{1\} \subset \mathbf{R}$ (4) $\{\emptyset\} \subset \mathbf{R}$

1.5 集合のイコール

A, B を集合とします。これらの集合が等しいとは、 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立することを言います。 A と B が等しいことを $A = B$ で表し、 A と B が等しくないことを $A \neq B$ で表します。

例 1.5. $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 4 < 0\} = \{-1, 0, 1\}$ であり、 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 - 4 < 0\} \neq \{1\}$ となります。

以下の問題にも取り組んでみてください。

問 1.6. (1) $-2\mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}$ は正しいか？ (2) $4\mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}$ は正しいか？

2 論理

2.1 命題

真（正しい）か偽（正しくない）か客観的に決定できる文を「命題 (Proposition)」と言います。命題が真であることを T (True) で表し、命題が偽であることを F (False) で表します。例えば、「2 は素数である」という命題は T であり、「4 は素数である」という命題は F になります。

2.2 述語

変数 x を含む文や式であり、 x に値を代入すると命題になるものを「述語」と呼びます。これは高校数学には現れなかった新しい概念だと思うので丁寧に説明します。例えば、「 x は植物である」という文を $P(x)$ で表すとして、このとき、 x に「石」を代入すると $P(\text{石}) = \text{「石は植物である」}$ という命題になり、この命題の真偽は F です。また、 x に「ヒマワリ」を代入すると $P(\text{ヒマワリ}) = \text{「ヒマワリは植物である」}$ という命題になり、この命題の真偽は T となります。このように、 $P(x)$ のままでは命題ではないのだけれど、 x に何か代入すると命題になり真偽を判定することができるものが述語です。他にも例を挙げておきます。

例 2.1. (1) $P(x)$ を「 $x > 2$ 」とすれば、 $P(x)$ は述語です。例えば、 $P(10)$ は T、 $P(0)$ は F です。

(2) $P(x, y)$ を「 $x > y$ 」とすれば、 $P(x, y)$ は述語です。例えば、 $P(1, 0)$ は T、 $P(10, 100)$ は F です。

通常、変数である x や y の動く範囲を前もって決めておくことが多いです。変数の動く範囲を「定義域

(Domain)」と言います。

例 2.2. 述語 $P(x)$ を「 $x > 2$ 」とし、定義域を $\mathbf{N}$ とします*4. このとき、 x に代入できるのは $\mathbf{N}$ の元のみなので、 $P(1)$ や $P(10)$ を考えることはできますが、 $P(-1)$ を考えることはできません。

ここで述語に関する練習問題を出しておきます。(1) は基本的ですが、(2) と (3) は発展です。

問 2.3. (1) 「 $P(x) : 1 < x < 4$ 」を $\mathbf{N}$ 上の述語とする。このとき、 $P(2)$ と $P(10)$ の真偽は？

(2) 「 $P(x) : x^2 = 2$ 」を $\mathbf{R}$ 上の述語とする。このとき、以下の命題 Q の真偽は？

「任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $P(x)$ は T である」 $\cdots$ Q

(3) (2) と同じ設定の下で、以下の命題 R の真偽は？

「 $P(x)$ が T となる $x \in \mathbf{R}$ が存在する」 $\cdots$ R

(答) (2) 「任意の」=「すべての」でした。「すべての実数 x に対して $P(x)$ は T である」ということはありませんね (例えば、 $x = 1$ のとき $P(x)$ は F です)。よって、命題 Q は F です。

(3) 今度は $P(x)$ が T となるような実数 x が (一つでもいいから) 存在すれば命題 R は T となり、一つも存在しなければ命題 R は F となります。 $x = \sqrt{2}$ とすれば $P(x)$ は T となるので、命題 R は T です。

2.3 量記号

問 2.3 では、「任意」と「存在」という言葉が出てきました。大学の数学ではこれらの言葉は至る所に現れます。是非、きちんと理解してください。また、あまりにもよく出てくるので、記号を使って略記することが多いです。ここではその記号を紹介します。

定義 2.4. $P(x)$ を D 上の述語とします。このとき、記号 $\forall$ と $\exists$ (これらをまとめて「量記号」と言います) を次で定めます*5。

$\forall x P(x)$ $\cdots$ 「任意の $x \in D$ に対して $P(x)$ は T である」

$\exists x P(x)$ $\cdots$ 「 $P(x)$ が T となる $x \in D$ が存在する」

注 2.5. (1) 英語では「任意の」を *Any, All, Arbitrary* と言います。この頭文字 A をひっくり返すと $\forall$ です。

また、「存在する」は *Exist* です。この頭文字 E をひっくり返すと $\exists$ です。

(2) $P(x)$ は述語ですが、 $\forall x P(x)$ と $\exists x P(x)$ は命題です。

最後の練習問題です。

問 2.6. (1) $\mathbf{R}$ 上の述語「 $P(x) : x^2 = 3$ 」に対して、 $\forall x P(x)$ と $\exists x P(x)$ の真偽は？

(2) $\mathbf{Q}$ 上の述語「 $P(x) : x^2 = 3$ 」に対して、 $\forall x P(x)$ と $\exists x P(x)$ の真偽は？

(3) $D = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ 上の述語「 $P(x) : x^2 = 3$ 」に対して、 $\forall x P(x)$ と $\exists x P(x)$ の真偽は？

以上で本稿は終わりです。皆さんと一緒にキャンパスで学べる日を楽しみに待っています。健康に気を付けて、授業スタートに向けた準備をしっかりとしておいてください。

*4 本稿ではこれを略して、「 $P(x) : x > 2$ 」を $\mathbf{N}$ 上の述語とする、という言い方も使います。

*5 先にも述べた通り、量記号 $\forall$ と $\exists$ は長い日本語「任意の...」、「... が存在する」を省略するための記号に過ぎません。