

曲線と積分の変数変換

大野 真裕

前例のない事態になり、新入生の皆さんの中にも、戸惑っておられる方もいるかと思います。こんなときだからこそ、通常の授業ではなかなか触れられないトピックスについて、触れてみたいと思います。せっかく大学に入ったのだから、ちょっとジャンプしてみませんか？ 少し難しめの話にチャレンジです。ただし、正式な大学の授業前の話なので、数 III の続きの数 IV 風にお話ししたいと思います。

例えば、座標平面の原点に太陽があつて、その周りの万有引力の様子を表したいとしましょう。本当は、空間内での話ですが、無駄に難しくしないために、平面上で考えてみましょう。太陽の質量を M 、万有引力定数を G とします。点 (x, y) にある質量 m の質点にかかる力の向きは、長さ 1 のベクトル

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

と同じです。力の大きさは、太陽（原点）との距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の 2 乗 $r^2 = x^2 + y^2$ に反比例するという万有引力の法則から、 $\frac{GMm}{r^2} = \frac{GMm}{x^2 + y^2}$ となります。従って、質量 m の質点にかかる力は、ベクトル

$$\frac{GMm}{x^2 + y^2} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \left(\frac{-GMmx}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \frac{-GMmy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \right)$$

で表されます。太陽の万有引力の様子を表しているのは、点 (x, y) にある質点の質量 m を除いた

$$\left(\frac{-GMx}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \frac{-GMy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \right)$$

と考えられます。

このように、座標平面上の各点 (x, y) に平面ベクトル $(f(x, y), g(x, y))$ が対応している状況というのは、よく表れます。上記の例であれば、 $f(x, y) = \frac{-GMx}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$ 、 $g(x, y) = \frac{-GMy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$ です。後の話を簡単にするために、このプリントで使われる言葉の定義をします。

定義 1 座標平面上の各点 (x, y) に平面ベクトル $(f(x, y), g(x, y))$ が対応しているとき、力の場 $(f(x, y), g(x, y))$ が与えられたという。

さて、力の場 $(f(x, y), g(x, y))$ が与えられて、その中を質点が動いたとき、力の場が質点にした仕事が物理で問題になります。簡単のため、以下、質点の質量は 1 とします。上の例でいけば $m = 1$ とします。仕事は力×距離だったけど、これは、移動する方向と力の方向が一致しているときの話。移動が $\Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$ で力が $\vec{F} = (f(x, y), g(x, y))$ のときは、 $\vec{F}$ と $\Delta \vec{r}$ のなす角を θ として、 $\vec{F}$ の $\Delta \vec{r}$ 方向成分 $|\vec{F}| \cos \theta$ を考えることで、力の方向を移動する方向に一致させて、 $\Delta \vec{r}$ の大きさ $|\Delta \vec{r}|$ と積をとる。つまり、

$$|\vec{F}| \cos \theta \times |\Delta \vec{r}| = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta$$

が仕事になります。これは $\vec{F}$ と $\Delta \vec{r}$ の内積 $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ にほかなりません。高校で勉強したように内積はベクトルの成分を使っても計算できるので、結局、仕事は、

$$|\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (f(x, y), g(x, y)) \cdot (\Delta x, \Delta y) = f(x, y) \Delta x + g(x, y) \Delta y$$

となります。

今、曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と表されているとします。高校のように書くとすると、関数を表す文字を新たに導入して、例えば、ギリシャ文字の φ (ファイといいます) と ψ (プサイといいます) を導入して、 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と書くことになります。このように書いてもいいのですが、大学では、扱う文字の数が増えるので、関数を表す文字をむやみに導入せず、文字を節約して、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ のように書いて、 x は t の関数、 y は t の関数ということを表したりします。

話をもとに戻して、曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と表されているとします。そして、力の場合 ($f(x, y), g(x, y)$) が与えられていて、質量 1 の質点を点 $(x(\alpha), y(\alpha))$ から曲線 C に沿って点 $(x(\beta), y(\beta))$ まで動かしたときに、力の場合 ($f(x, y), g(x, y)$) が質点に対しておこなう仕事を求めたいとします。難しそうですが、質点をちょっとだけ、 $(\Delta x, \Delta y)$ だけ、動かしたときの仕事は、先ほど見たように、

$$f(x, y)\Delta x + g(x, y)\Delta y$$

です。媒介変数の区間 $[\alpha, \beta]$ を

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

と細かく分割して、 $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$ とおき、和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + g(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i)$$

を考えます。これは、ちょっとだけ、 $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ だけ、動かして仕事 $f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + g(x_0, y_0)(y_1 - y_0)$ を求め、次にまたちょっとだけ、 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ だけ、動かして仕事 $f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + g(x_1, y_1)(y_2 - y_1)$ を求め、ということを繰り返して曲線の端のほうまで動かして、最後に部分部分で求めた仕事を全部足し算したものです。これで、質点を曲線 C に沿って点 $(x(\alpha), y(\alpha))$ から点 $(x(\beta), y(\beta))$ まで動かしたときに、力の場合 ($f(x, y), g(x, y)$) が質点に対しておこなう仕事がおおよそ求まります。正確に求めるには、分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

をどんどん細かくしていったときの極限をとればよい。その極限値を

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

と書き、曲線 C にそっての線積分といいます。なんだか、とっても難しいと思われるかもしれませんが、実際に計算するときは、

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + g(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right\} dt$$

と変数変換して計算することが多いです。数 III を勉強してきた諸君は、上の式は、まあ、もっともらしい、確かにそうだろうなあ、と思われるのではないかと思います。右辺は高校で勉強した積分です。ここで、一つ例題を解いてみましょう。

例題 1 曲線 C が $x = t^2$, $y = t^3$, ($0 \leq t \leq 1$) と媒介変数表示されているとします。このとき、線積分

$$\int_C xy dx + (x + y) dy$$

を求めよ。

[解]

$$\int_C xy \, dx + (x+y) \, dy = \int_0^1 \{t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + (t^2 + t^3)3t^2\} dt = \frac{2}{7} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} = \frac{97}{70}.$$

課題 1 曲線 C が $x = t^2, y = t^3, (0 \leq t \leq 1)$ と媒介変数表示されているとする. このとき, 線積分

$$\int_C (x+y) \, dx + xy \, dy$$

を求めよ.

さて, 線積分を知っていると何がいいのでしょうか? 例えば, $f(x, y)$ を x, y に関する有理式, 例えば, $\frac{1}{y}$ や $\frac{x}{x+y}$ などとして,

$$\int_a^b f(x, \sqrt{x^2+1}) dx$$

という積分を求めることを考えてみましょう. ここで, $f(x, \sqrt{x^2+1})$ は $f(x, y)$ の y のところに $\sqrt{x^2+1}$ を代入したものです. 上記の積分は次のようにすると線積分と思えます. 曲線 C を媒介変数 x を用いて, $x = x, y = \sqrt{x^2+1}, (a \leq x \leq b)$ で表される曲線とし, 力の場 $(f(x, y), 0)$ が与えられたとすると,

$$\int_a^b f(x, \sqrt{x^2+1}) dx = \int_a^b f(x, \sqrt{x^2+1}) \frac{dx}{dx} dx = \int_C f(x, y) dx + 0 dy = \int_C f(x, y) dx$$

となります. このように積分 $\int_a^b f(x, \sqrt{x^2+1}) dx$ を線積分 $\int_C f(x, y) dx$ と思えると何がいいのでしょうか? それは, 曲線 C を表す別の媒介変数表示を考えることができる点にあります. 曲線 C の別の媒介変数表示 $x = x(t), y = y(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ があって,

$$\int_C f(x, y) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

の右辺が簡単に計算できるというわけです. 曲線 C は双曲線 $D: y^2 - x^2 = 1$ の上半分の一部です. C の端点 $(a, \sqrt{a^2+1}), (b, \sqrt{b^2+1})$ を, $(x_0, y_0) = (a, \sqrt{a^2+1}), (x_1, y_1) = (b, \sqrt{b^2+1})$ とおきます. 別の媒介変数表示では, $(x_0, y_0) = (x(\alpha), y(\alpha)), (x_1, y_1) = (x(\beta), y(\beta))$ なので, $t (\alpha \leq t \leq \beta)$ に C 上の点 (x, y) を対応させる写像 $x = x(t), y = y(t)$ の逆写像, つまり, C 上の点 (x, y) に $t (\alpha \leq t \leq \beta)$ を対応させる写像

$$t = h(x, y)$$

もわかると, $\alpha = h(x_0, y_0), \beta = h(x_1, y_1)$ と α, β も計算できて好都合です.

双曲線 $D: y^2 - x^2 = 1$ の上半分の一部である曲線 C に対して, 上記のような性質をみたす媒介変数表示と $h(x, y)$ の例として, 例えば, 次のものが知られています,

$$(1) \quad x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t = \log(x+y) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$(2) \quad x = \tan t, \quad y = \frac{1}{\cos t}, \quad t = \text{Tan}^{-1} x$$

$$(3) \quad x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad t = x + y = x + \sqrt{x^2+1}$$

(1) については, 詳しくは当サイト内の双曲線関数に関する新入生用の資料をご覧ください. ここでは, (3) との関係を描き出すにとどめておきます. (3) の t を $t = e^u$ と変数変換したものが (1) の式の t を u に変えたものになります. 次に, (2) のところで, $\text{Tan}^{-1} x$ と書かれているものは, アークタン

ジェントとよばれる関数で、逆三角関数と呼ばれる関数の一つです． $\tan x$ の逆数 $\frac{1}{\tan x} = (\tan x)^{-1}$ と混同しないでください．逆三角関数については、正式な講義が始まった後に学ぶので、(2) についても、ここでは深入りしません．ただ、高校の復習をかねて、次の課題を出しておきます．

課題 2 $x = \tan t$, $y = \frac{1}{\cos t}$ とするとき、 $y^2 - x^2 = 1$ となることを示せ．

さて、ここでは (3) について、少し詳しく見ておきたいと思います．まず、(3) の変数変換はどのように考えて導かれたのでしょうか？ 典型的な考え方は以下の通りです．直線 $L(0): x + y = 0$ は双曲線 $D: y^2 - x^2 = 1$ の漸近線で、直線 $L(0)$ と双曲線 D は交わりませんが、これらは、直線 $L(0)$ の伸びた先にある無限遠点 P で接していると考えます．より詳しくは 2 次曲線 D と直線 $L(0)$ は無限遠点 P で共有点を 2 個持っていると考えます． $L(0)$ と平行な直線 $L(t): x + y = t$ も同じ無限遠点 P を通っていると考えます．ただし、 $t \neq 0$ のときは、 $L(t)$ は 2 次曲線 D と P で交わっているけど、接していないと考えます．言い換えると、 P で 1 回だけ交わっていると考えます．従って、 $L(t)$ は 2 次曲線 D と P 以外の点 $Q(t)$ でもう一回交わります．点 $Q(t)$ は t に応じて決まります．この $Q(t)$ を求めてみましょう． $Q(t)$ は D と $L(t)$ の交点なので、 $y^2 - x^2 = 1$ と $x + y = t$ を連立すると、 $(y - x)(y + x) = 1$ に注意して、連立一次方程式

$$y - x = \frac{1}{t} \quad x + y = t$$

となります．これを解くと $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$ ．元々 $t = x + y$ としていたので、 $\alpha \leq t \leq \beta$ のときを考えれば、これで、(3) の変数変換が導かれたことがわかります．

最後に、(3) の変換の特徴について触れておきたいと思います．この変換には次の 3 つの特徴があります．

- 実数 t ($\alpha \leq t \leq \beta$) に対して、 C 上の点 $(x(t), y(t))$ を対応させる写像 $Q(t) = (x(t), y(t))$ の成分 $x(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $y(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$ は、それぞれ t の有理式となっていること、
- C 上の点 (x, y) に対して、実数 $h(x, y)$ ($\alpha \leq h(x, y) \leq \beta$) を対応させる写像 $h(x, y) = x + y$ も x, y の有理式になっていること、
- Q と h は互いに他の逆写像になっていること

このような変換 Q や h のことを双有理変換といいます（この術語は、通常は、もう少し、定義域や終域を自然に広げた図形について使いますが、ここでは気にしないことにします）．(3) の変換の良いところは、 $x(t)$ が t の有理式なので、 $\frac{dx}{dt}$ も t の有理式、 $f(x, y)$ が x, y の有理式とすると、 $x(t), y(t)$, ともに t の有理式なので、合成関数 $f(x(t), y(t))$ も t の有理式で表されて、結局、積 $f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}$ も t の有理式、従って、積分 $\int_a^b f(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx$ は

$$\int_a^b f(x, \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_C f(x, y) dx = \int_{h(a, \sqrt{a^2 + 1})}^{h(b, \sqrt{b^2 + 1})} f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

より、 t の有理式の積分に帰着され、その結果が $t = h(x, \sqrt{x^2 + 1})$ によって、 x の世界、 a, b で表される式、に戻っていることが原理的にわかる点にあります．

以上、これから 1 年生で学ぶ数学の一部の背景について、お話ししました．どうでしたか？ 少し難しかったですか？ 現時点では、わからないことがあっても気落ちする必要は全くありません．完璧にはわからないけど、何となく雰囲気をつかめば OK です．そのなんとなくつかんだものを正確にして深めていきましょう．また、数学の本の文章を読んで慣れていきましょう．熱意をもって数学に取り組まれることを期待します．