平面と空間の図形 (内積, 外積の利用)

練習問題【解答例】

$\boxed{1}$ (i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = \boxed{9}$. (ii) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 2 - 4\cdot(-1) \\ 4\cdot 2 - 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}}$.

(iii) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (-3)\cdot 1 + 6\cdot(-2) + 6\cdot 3 = \boxed{3}$.

(iv) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\theta = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

(v) (面積) $= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+6^2} = \boxed{9}$. $\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ でも計算可.

(vi) (体積) $= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |3| = \boxed{3}$.

(vii) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が作る四面体は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体に対して, 底面が平行四辺形の半分の三角形であり, かつ錐になっているので, (求める体積) $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積) $= \dfrac{3}{6} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

$\boxed{2}$ (i) まず, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$. よって, 外積の性質を用いて,

$$(\text{三角形 ABC の面積}) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+5^2+(-4)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2}},$$

$$(\text{四面体 ABCD の体積}) = \frac{1}{6}\|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\| = \frac{1}{6}(14-5+12) = \boxed{\frac{7}{2}}.$$

(ii) 直線 AB は点 $\mathrm{A}(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする. よって, 直線 AB の方程式は

$\boxed{x-1 = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{-2}}$.

(iii) 平面 ABC は点 $\mathrm{A}(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, この平面の方程式は

$$7(x-1) + 5y - 4(z-2) = 0. \qquad \therefore\ \boxed{7x+5y-4z+1=0}.$$

$\boxed{3}$ 直線上の点は $(2t+1, -3t-1, -t+2)$ と表される. 平面 $-2x+3y+z-11=0$ との交点においては,

$$-2(2t+1) + 3(-3t-1) + (-t+2) - 11 = 0. \qquad \therefore\ t = -1.$$

よって, 交点の座標は $\boxed{(-1,\,2,\,3)}$.

$\boxed{4}$ 2 平面の交線とは, 2 つの平面の共通部分として与えられる直線のことである.

[方法 1] まず, 交線 ℓ と平面 $z = t$ との交点を求める. $\begin{cases} y-t-1=0 \\ x-y+2t+2=0 \end{cases}$ を x, y について解けば, $x = -t-1$, $y = t+1$ であるから, 交点の座標は $(-t-1,\, t+1,\, t)$. よって, 直線 ℓ は $\begin{cases} x = -t-1 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$ と媒介変数表示され, その方程式は $\boxed{\dfrac{x+1}{-1} = y-1 = z}$.

[方法 2] 2 平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{n}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ で与えられるので, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が交線 ℓ の方向ベクトルとなる. また, ℓ と平面 $z=0$ との交点 $(-1,1,0)$ は ℓ 上の点である. よって, 直線 ℓ の方程式は

$\boxed{x+1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}}$.

$\boxed{5}$ 2 直線の方向ベクトルは $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{d}' = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. また, 2 直線上の点は

$$(5s-a,\, 3s+1,\, 4s+2), \quad (5t-4,\, -4t+5,\, 3t-1)$$

とおけることに注意する.

(i) $a = -1$ のとき, $(5s+1, 3s+1, 4s+2) = (5t-4, -4t+5, 3t-1) \iff (s,t) = (0,1)$ より, 2 直線は 点 $(1,1,2)$ で交わる. 次に, 2 直線を含む平面は $\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{d}' = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -35 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし, 点 $(1,1,2)$ を通るから, その方程式は

$$5(x-1) + (y-1) - 7(z-2) = 0. \qquad \therefore\ \boxed{5x + y - 7z + 8 = 0}.$$

(ii) $a = 14$ のとき, 与えられた 2 直線と求める直線 (共通垂線) との交点は

$$\mathrm{A}\,(5s-14,\, 3s+1,\, 4s+2), \quad \mathrm{B}\,(5t-4,\, -4t+5,\, 3t-1)$$

とおける. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}'$ の両方と垂直であるから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{d}'$. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} -5s+5t+10 \\ -3s-4t+4 \\ -4s+3t-3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

を満たす k が存在する. これより, $s = 1,\ t = 0,\ k = 1$. よって, $\mathrm{B}(-4, 5, -1)$ となるから, 求める直線の方程式は $\boxed{\dfrac{x+4}{5} = y - 5 = \dfrac{z+1}{-7}}$.

$\boxed{6}$ 問題文の考え方に従う. まず, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ (垂線の足の位置ベクトル) が平面 $ax + by + cz + d = 0$ 上の点であるから,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_1 + d = 0.$$

また, $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1$ は平面 $ax + by + cz + d = 0$ に対して垂直であるから, $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1 /\!/ \boldsymbol{n}$, 従って $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1 = t\boldsymbol{n}$ とおける. ここで, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - t\boldsymbol{n}$ を上の関係式に代入して,

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x}_0 - t\boldsymbol{n}) + d = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0 - t\|\boldsymbol{n}\|^2 + d = 0. \qquad \therefore\ t = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0 + d}{\|\boldsymbol{n}\|^2}.$$

よって,

$$(\text{垂線の長さ}) = \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1\| = |t|\|\boldsymbol{n}\| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0 + d|}{\|\boldsymbol{n}\|^2} \cdot \|\boldsymbol{n}\| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_0 + d|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$