

平面と空間の図形 (内積, 外積の利用)

《要旨》 外積を定義し, 内積, 外積と関連させて「基本図形の面積, 体積」や「空間内の直線, 平面」を取り扱う.

《表記や用語の注意》

- 高校教科書ではベクトルを $\vec{a} = (a_1, a_2)$ (矢印, 横並びの成分) の形で表したが, 大学では $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ (太字, 縦並びの成分) と表記することが多い. もっている情報は同じだが, 「行列」を用いた計算に適する.
- 高校教科書では一般の点の位置ベクトルを $\vec{p} = (x, y)$ と表すことが多いが, ここでは, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を用いる. 物理では $\mathbf{r}$ を用いることが多い.
- ベクトル $\mathbf{p}$ に対し「点 $\mathbf{p}$ 」は $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\mathbf{p}$ は P の位置ベクトル). 点 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とベクトル $\mathbf{a}$ に対して, $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ は点 $\mathbf{p}$ から点 $\mathbf{q}$ に向かうベクトルを表し, $\mathbf{p} + \mathbf{a}$ は点 $\mathbf{p}$ を $\mathbf{a}$ だけ移動した点を表す.

1 内積と外積

1.1 内積 (スカラー積)

n 次元ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ (成分は実数) の**大きさ** (= ノルム) を $\|\mathbf{a}\|$ (または $|\mathbf{a}|$) で表す ($n = 2, 3$ と考えてよい):

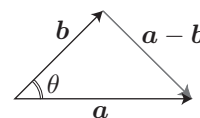
$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} (\neq \mathbf{0})$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とするとき (右下の三角形を考えよ), $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**内積** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (または $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ のどちらかが } \mathbf{0} \text{ のときは } 0 \text{ と定める})$$

で定義する. 特に, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ であり, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (垂直, 直交) となる. 上式右辺は余弦定理より $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \frac{1}{2} (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)$ であるから, 内積は成分を用いて

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$



と表される. この表現を用いれば, 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ に関する次の計算法則が容易に得られる:

- ① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, ② $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$,
- ③ $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ (k は実数).

1.2 外積 (ベクトル積)

空間ベクトル (3 次元ベクトル) $\mathbf{a}, \mathbf{b} (\neq \mathbf{0})$ が平行でないとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と直交し, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ が**右手系** (下で説明する) となるような大きさ 1 のベクトル $\mathbf{n}$ が一意に定まる. このとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) として, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**外積** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

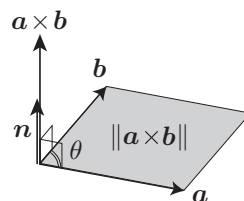
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta) \mathbf{n} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ が平行, どちらかが } \mathbf{0} \text{ のときは } \mathbf{0} \text{ と定める})$$

で定義する (図形的な定義). 従って, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

- ① $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と直交する, ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が右手系をなす,
- ③ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の作る平行四辺形の面積} \rangle$

という性質をもつ唯一つのベクトルとして特徴付けられる. 一方, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

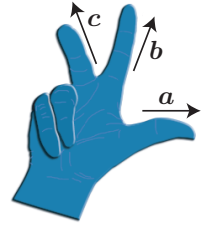
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$



とも定義される (成分による定義). 証明は省略するがこれらは同値な定義である. 成分による表現を用いれば, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ に関する次の計算法則が容易に得られる:

- ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ② $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
 ③ $(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (k は実数).

ここで, ■空間ベクトル (3次元ベクトル) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が**右手系**である, あるいは右手系をなすとは, 右手の親指, 人差し指, 中指の3本だけを立てたとき, この3本の指の方向をこの順に, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の方向に合わせることができるとをいう ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の順序が重要). 特に, 空間の x 軸, y 軸, z 軸の方向は右手系をなす. ■平面ベクトル (2次元ベクトル) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ についても, 右手の掌を上にして親指, 人差し指の2本だけを立てることにより, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が右手系をなすことが定義できる. 特に, 平面の x 軸, y 軸の方向は右手系をなす. ■右手を左手に入れ換えて**左手系**が定義される.

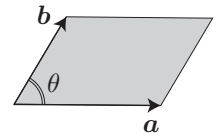


2 面積と体積

2.1 平行四辺形の面積

n 次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形 (右下図) の面積を S とすれば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) として,

$$\begin{aligned} S^2 &= (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta)^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right)^2 \right\} = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) = \sum_{i,j=1}^n (a_i^2 b_j^2 - a_i a_j b_i b_j) \\ &= \sum_{i \neq j} (a_i^2 b_j^2 - a_i a_j b_i b_j) = \sum_{i < j} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j) = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &= \begin{cases} (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 & (n=2), \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 & (n=3). \end{cases} \end{aligned}$$



ここで, $\sum_{i \neq j}$ は $i \neq j$ であるすべての (i, j) の組 (もちろん $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) に対する和を表し, $\sum_{i < j}$ は $i < j$ であるすべての (i, j) の組に対する和を表す. ($n=2, 3$ のとき具体的に計算してみよ.) よって,

$$S = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = \begin{cases} |a_1 b_2 - a_2 b_1| & (n=2) \\ \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & (n=3) \end{cases}.$$

補足 平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が (面積が0でない) 平行四辺形を作るとする. $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ まで正の向きに測った角を θ (後のために $-\pi/2 < \theta \leq 3\pi/2$) とし, $\mathbf{a}$ を正の向きに $\pi/2$ だけ回転させたベクトルを $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ ($i(a_1 + ia_2) = -a_2 + ia_1$ に注意) と書けば, $\tilde{\mathbf{a}}$ から $\mathbf{b}$ まで測った角は $\theta - \pi/2 \in (-\pi, \pi]$ で, $\tilde{\mathbf{a}}$ と $\mathbf{b}$ のなす角は $|\theta - \pi/2|$ となる. 従って,

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \|\tilde{\mathbf{a}}\| \|\mathbf{b}\| \cos \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

これより, $a_1 b_2 - a_2 b_1$ は, その絶対値が $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積を表し, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が右手系 ($0 < \theta < \pi$) となるときの正の値をとり, 左手系 ($-\pi/2 < \theta < 0, \pi < \theta \leq 3\pi/2$) となるときの負の値をとる. この意味で $a_1 b_2 - a_2 b_1$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の**符号付き面積**であるといえる. 実はこの数は行列 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ に対する**行列式**と呼ばれ, $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ と表記される (図形的以外にも) 重要な量である.

この記号を用いれば, 空間ベクトル (3次元ベクトル) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ に対して, 外積 $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ の3つの成分は上から順に $\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ と書かれる.

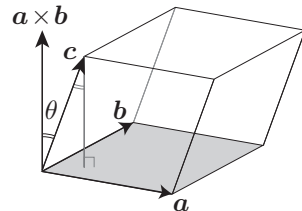
2.2 平行六面体の体積

空間ベクトル (3次元ベクトル) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る**平行六面体**(下図)において, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角を θ とする. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平面と直交するから, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形を底面と見たときの平行六面体の高さ h は

$$h = \|\mathbf{c}\| |\cos \theta| = \|\mathbf{c}\| \cdot \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

よって, 平行六面体の体積 V は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積を S として,

$$V = Sh = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \boxed{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}.$$



補足 空間ベクトル (3次元ベクトル) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ に対して定まる量 (数) $\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}$ について考える. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が (体積が 0 でない) 平行六面体を作るとき, この数の絶対値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の体積を表し, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系をなす ($0 < \theta < \pi/2$ となる) とき正の値をとり, 左手系をなす ($\pi/2 < \theta < \pi$ となる) とき負の値をとる. この意味で $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の**符号付き体積**であるといえる. 実はこの数は行列 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ に対する**行列式** $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ と呼ばれるものに他ならない.

3 直線と平面

3.1 平面の直線

- 点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ に平行な直線 ℓ 上の任意の点 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ のベクトル方程式} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ の媒介変数表示} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ の方程式} \end{array} \quad (= t)$$

と表される ($\mathbf{a}$ を ℓ の**方向ベクトル**と呼ぶ). 一方, ベクトル $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ が ℓ と直交するならば, 直線 ℓ 上の任意の点 $\mathbf{x}$ は

$$\boxed{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ のベクトル方程式} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ の方程式} \end{array}$$

とも表される ($\mathbf{p}$ を ℓ の**法線ベクトル**と呼ぶ). (ℓ の方程式は $ax + by + c = 0$, $ax + by = c$ または $y = px + q$ の形に整理することが多い.) 上において, ℓ の方向ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ に対して, 法線ベクトルを $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ と選べることに注意.

3.2 空間の直線と平面

- 点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ に平行な直線 ℓ 上の任意の点 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ のベクトル方程式} \end{array} \quad (t \text{ は実数}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ の媒介変数表示} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \quad \begin{array}{c} \text{直線 } \ell \text{ の方程式} \end{array} \quad (= t)$$

と表される ($\mathbf{a}$ を ℓ の**方向ベクトル**と呼ぶ). (右上の直線 ℓ の方程式の表現は $abc = 0$ のとき破綻するが, 例えば $a = 0, bc \neq 0$ なら, $x = x_0, \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ と解釈する.)

- 点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ を通り, (平行でない) 2 つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ に平行な平面 α 上の任意の点

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ は}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2} \quad (s, t \text{ は実数}) \Leftrightarrow$$

平面 α のベクトル方程式

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1s + a_2t \\ y = y_0 + b_1s + b_2t \\ z = z_0 + c_1s + c_2t \end{cases}$$

平面 α の媒介変数表示

と表される. また, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 両方に直交するベクトル (例えば外積 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$) を $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ とすれば,

$$\boxed{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0} \Leftrightarrow \boxed{p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0}$$

平面 α のベクトル方程式

平面 α の方程式

とも表される ($\mathbf{p}$ を α の **法線ベクトル** と呼ぶ). ($px + qy + rz + d = 0$ のような形に整理する.)

4 練習問題

- 1 空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に対して以下を計算せよ.
- (i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (iii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$,
 (iv) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角, (v) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積,
 (vi) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が作る平行六面体の体積, (vii) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が作る四面体の体積.
- 2 4 点 A(1, 0, 2), B(2, -3, 0), C(-1, 2, 1), D(3, -1, -1) に対して以下の問いに答えよ.
- (i) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を計算し, 三角形 ABC の面積, 四面体 ABCD の体積を求めよ.
 (ii) 直線 AB (= A, B を通る直線) の方程式を求めよ. (Hint: $\overrightarrow{AB}$ が直線 AB の方向ベクトル)
 (iii) 平面 ABC (= A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (Hint: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ が平面 ABC の法線ベクトル)
- 3 直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1}$ と平面 $-2x + 3y + z - 11 = 0$ の交点の座標を求めよ.
 (Hint: この直線上の点は $(2t+1, -3t-1, -t+2)$ と表される.)
- 4 2 平面 $y - z - 1 = 0, x - y + 2z + 2 = 0$ の交線 ℓ の方程式を求めよ. (交線 ℓ は連立 1 次方程式 $y - z = 1, x - y + 2z = -2$ の解の集合にほかならない.)
 (Hint: [方法 1] 交線 ℓ と平面 $z = t$ との交点を求めれば, ℓ の媒介変数表示が得られる. [方法 2] 交線 ℓ の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルの外積で得られる. ℓ の通る点としては xy 平面 ($z = 0$) との交点を考えよ.)
- 5 2 直線 $\frac{x+a}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}, \frac{x+4}{5} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+1}{3}$ (a は定数) について考える.
- (i) $a = -1$ のとき 2 直線は交わる. 2 直線の交点の座標と 2 直線を含む平面の方程式を求めよ.
 (ii) $a = 14$ のとき 2 直線はねじれの位置にある (平行でなく共有点を持たない). 2 直線の共通垂線 (両方と垂直に交わる直線) の方程式を求めよ. ($a \neq -1$ ならば 2 直線はねじれの位置にある.)
 (Hint: 2 直線の方向ベクトルの外積が (i) の平面の法線ベクトル, (ii) の共通垂線の方向ベクトルとなる.)
- 6 点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ から平面 $ax + by + cz + d = 0$ に下ろした垂線の長さ (点と平面との距離) を考える. $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ がこの平面の法線ベクトルであるから, 垂線の足 (垂線が平面と交わる点) を $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ とすれば,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + d = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \parallel \mathbf{n} \quad (\Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{n} \text{ とおける})$$

が成り立つ. これより, $\langle \text{垂線の長さ (点と平面との距離)} \rangle = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ を導け.