

## 「集合と論理」の解答例

2020年5月28日(木)

### 問 1.1

(1)  $\{-1, 0, 1\}$  (2)  $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4 < 0\}$  (3)  $\emptyset$

### 問 1.3

(1) 正しい (2) 正しくない:  $-1 \notin \mathbf{N}, 0 \notin \mathbf{N}$  (3) 正しい

#### (3) の証明

$a \in -2\mathbf{Z}$  とする. このとき, 定義より, ある  $n \in \mathbf{Z}$  が存在して  $a = -2n$  と書ける. よって,  $m = -n$  とすれば,  $m \in \mathbf{Z}$  であり  $a = 2m$  となる. すなわち,  $a \in 2\mathbf{Z}$ . 以上で  $-2\mathbf{Z} \subset 2\mathbf{Z}$  が示せた.

### 問 1.4

(1) 正しくない. 例えば,  $1 \in \mathbf{R}$  や  $\{1\} \subset \mathbf{R}$  とすれば正しい.

(2) 正しくない.

(3) 正しい.

(4) 正しくない. 例えば,  $\emptyset \subset \mathbf{R}$  とすれば正しい.

### 問 1.6

(1) 正しい (2) 正しくない

#### (1) の証明

問 1.3 (3) で  $-2\mathbf{Z} \subset 2\mathbf{Z}$  を示したので,  $2\mathbf{Z} \subset -2\mathbf{Z}$  を示せば  $-2\mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}$  であることが言える. 以下,  $2\mathbf{Z} \subset -2\mathbf{Z}$  を示す.

$a \in 2\mathbf{Z}$  とする. このとき, 定義より, ある  $n \in \mathbf{Z}$  が存在して  $a = 2n$  と書ける. よって,  $m = -n$  とすれば,  $m \in \mathbf{Z}$  であり  $a = -2m$  となる. すなわち,  $a \in -2\mathbf{Z}$ . 以上で  $2\mathbf{Z} \subset -2\mathbf{Z}$  が示せた.  $-2\mathbf{Z} \subset 2\mathbf{Z}$  かつ  $2\mathbf{Z} \subset -2\mathbf{Z}$  が言えたので  $-2\mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}$  である.

#### (2) の反例

$2 \notin 4\mathbf{Z}$  かつ  $2 \in 2\mathbf{Z}$  である.

### 問 2.3

(1)  $P(2)$  は真,  $P(10)$  は偽 (2) 偽: 反例は  $x = 1$

(3) 真: 例えば  $x = \sqrt{2}$  とすれば  $P(x)$  は真

**問 2.6**

(1)  $\forall xP(x)$  は偽 : 反例は  $x = 1$ ,  $\exists xP(x)$  は真 : 例えば  $x = \sqrt{3}$  とすれば  $P(x)$  は真

(2)  $\forall xP(x)$  は偽 : 反例は  $x = 1$ ,  $\exists xP(x)$  は偽 :  $\pm\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$  に注意

(3)  $\forall xP(x)$  は真,  $\exists xP(x)$  は真