

複素数と行列による平面上の点の移動（2020 年度新入生用資料）

目標

- 複素数の積と座標平面上の点の移動の関係を復習する。
- 2×2 行列の掛け算について学習する。新しい積の定義と平面上の点の移動の関係を理解しよう。

注意!!

高校では、座標平面上の点や位置ベクトルを (x, y) と横に並べて書いていたが、この資料や線形代数学の講義では、 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と縦に並べて書く。ベクトルの和と実数倍は、 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}, k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ とする。このように書く理由は、この資料で説明する「 2×2 行列の積」と「座標平面上の点の移動」を整合的に記述するためである。

1. 複素数と複素数平面 (復習)

まず、高校で学習した複素数の用語を復習しよう。

$x^2 = -1$ を満たす x をひとつとって i (あるいは $\sqrt{-1}$) とかき、**虚数単位**という。 $a + bi$ (a, b は実数) と表される数のことを**複素数**と呼ぶ。 a を**実部**, b を**虚部**という。複素数 z の実部を $\operatorname{Re}(z)$, 虚部を $\operatorname{Im}(z)$ とかく。それらの和・差と積を次のように定義していた。

$$\text{和・差: } (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$\text{積: } (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

複素数 $a + bi$ に対し、複素数 $a - bi$ をその**共役複素数**という。複素数 z に対し、その共役複素数を $\bar{z}$ とかく。

複素数 $z = a + bi$ に対し、 $\sqrt{a^2 + b^2}$ を $|z|$ とかき、複素数 z の**絶対値**という。 $z\bar{z} = |z|^2$ が成り立つ。 $z = a + bi$ に対し、 $\frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i$ である。 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$ となるような $0 \leq \theta < 2\pi$ がただ一つ存在するので、 $z = a + bi = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表せる。この θ を z の**偏角**といい、

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

という複素数の表示のことを**極形式**という。三角関数の加法定理に注意すると

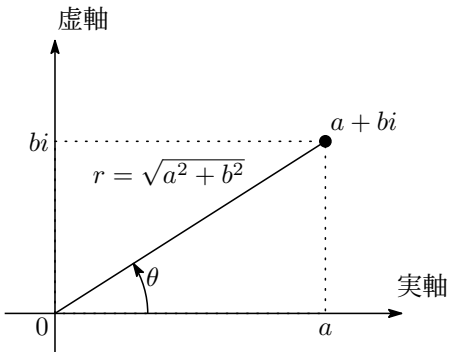
$$r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot s(\cos \varphi + i \sin \varphi) = rs(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)) \tag{1.1}$$

が成り立つ。特に次の性質は**ド・モアブルの定理**と呼ばれていた。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

この式の図形的な意味を理解するために複素数平面を復習しよう。

複素数 $a + bi$ と座標平面上の点 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を同一視することにより、座標平面上の点と複素数は一対一に対応する。座標平面での x 軸は実数全体と対応する。このようにして座標平面を複素数の全体とみたものを**複素数平面**と呼び、 x 軸を**実軸**, y 軸を**虚軸**という。複素数平面において、複素数の絶対値は、原点からの距離であり、偏角は実軸正の方向から反時計回りにはかった角度に他ならない。この見方によれば、式 (1.1) の意味は次のようになる。



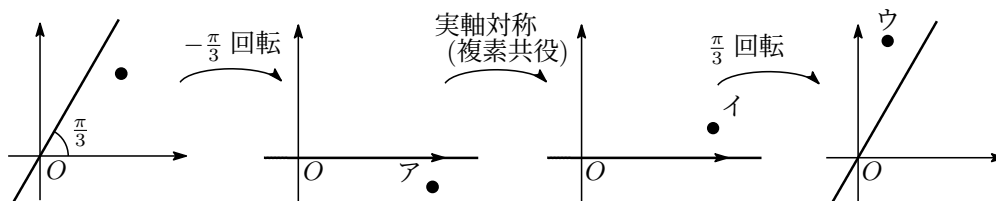
複素数 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を別の複素数 z に掛けることにより、絶対値は r 倍になり、偏角は反時計周りに θ 増える。

従って、複素数平面上で複素数をかけることによる座標平面上の点の移動は、原点を中心とした回転と原点を中心とした拡大・縮小を与えていることになる。

例 1. 座標平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を原点を中心として反時計周りに θ 回転した点の座標を求めるには、複素数平面上の点 $x + iy$ に $\cos \theta + i \sin \theta$ をかけて、 $(\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$ と計算すればよい。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{原点を中心とし反時計周りに}\theta\text{回転}} \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

例 2. 座標平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を x 軸に対して対称な点に移動すると $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ になる。これを複素数平面上で見ると、 $x + iy$ を $x - iy$ に移すことになる。つまり、複素共役を取ることが複素数平面上で実軸に関して対称な点に移すことを意味している。これを利用すると、原点を通る直線に関する線対称移動が簡単に求められる。例えば、座標平面上の直線 $l: y = \sqrt{3}x$ に関する線対称移動を考えてみよう。この直線の x 軸となす角は $\frac{\pi}{3}$ である。そこで、まず直線 l が x 軸となるように回転し、 x 軸に関して線対称移動してから、回転した分を元に戻すと考えよう。



$$\begin{aligned} x + iy &\xrightarrow{\text{原点を中心として}-\frac{\pi}{3}\text{回転}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) (x + iy) = \frac{(x + \sqrt{3}y) + i(y - \sqrt{3}x)}{2} \dots \text{ア} \\ &\xrightarrow{x\text{ 軸に関して線対称移動}} \frac{(x + \sqrt{3}y) + i(y - \sqrt{3}x)}{2} = \frac{(x + \sqrt{3}y) - i(y - \sqrt{3}x)}{2} \dots \text{イ} \\ &\xrightarrow{\text{原点を中心として}\frac{\pi}{3}\text{回転}} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) \frac{(x + \sqrt{3}y) + i(y - \sqrt{3}x)}{2} = \frac{(-x + \sqrt{3}y) + i(\sqrt{3}x + y)}{2} \dots \text{ウ} \end{aligned}$$

と計算すると、 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{y=\sqrt{3}x\text{ に関する線対称移動}} \begin{bmatrix} \frac{-x+\sqrt{3}y}{2} \\ \frac{\sqrt{3}x+y}{2} \end{bmatrix}$ とわかる。より一般に、原点を通る直線 $y = (\tan \theta)x$ に関する線対称移動は、次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{y=(\tan \theta)x\text{ に関する線対称移動}} \begin{bmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

練習問題 1 式 (1.1) および式 (1.3) を証明せよ。

2. 2×2 行列とその演算

線形代数第一の講義の中心的な主題は「行列」である。ここで言う行列とは、 mn 個の数を m 行 n 列に並べた表である。一般的なことは線形代数の講義が始まってから丁寧に扱うので、ここでは、4 個の数を 2 行 2 列に並べた表 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を考えよう。これを 2×2 行列とよぶことにする。

まず 2×2 行列と平面上のベクトルの掛け算を

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

と定義しよう。この掛け算を次のような意味で理解したい。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ を左から掛けると、平面上の点 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ が } \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \text{ に移る。}$$

(1.2) を思い出してみると, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$ となっているので,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ を左から掛けると, 平面上の点は, 原点を中心として反時計回りに } \theta \text{ 回転する.} \quad (2.2)$$

(1.3) を思い出してみると, $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{bmatrix}$ となっているので,

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \text{ を左から掛けると, 平面上の点は, 直線 } y = (\tan \theta)x \text{ に関して線対称な点に移る.} \quad (2.3)$$

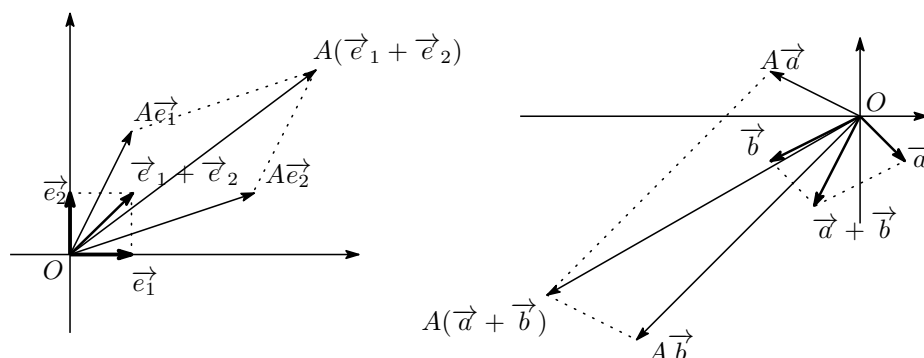
より一般に, 複素数 $a + bi$ を $x + iy$ に掛けると, $(a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ となるから, 座標平面では, 点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{bmatrix}$ に移す. これは, (2.1) の形でかくと $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に等しいので,

複素数平面上で $a + bi$ を掛けること $= 2 \times 2$ 行列 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ を左から掛けること

となる. このように考えると, (2.1) は, 複素数平面を利用して行う座標平面上的点の移動 (原点を中心とする回転と原点を中心とする拡大・縮小) よりもさらに多くの点の移動を扱えることがわかる.

例 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を左から掛けることで平面上の点 (位置ベクトル) $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ がどのように動かされるかを見てみよう.

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & A\vec{e}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, & A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ A\vec{a} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, & A\vec{b} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}, & A(\vec{a} + \vec{b}) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



この例では, $A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ と $A\vec{a} + A\vec{b} = A(\vec{a} + \vec{b})$ が満たされていることが確認できる.

一般に, (2.1) で定義された 2×2 行列 A とベクトルのかけ算は, どんなベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ と実数 k に対しても

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(k\vec{x}) = k(A\vec{x}) \quad (2.4)$$

を満たす.

練習問題 2

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ の場合に, 上と同じ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}, \vec{b}$ を使って, $A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 = A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ と $A\vec{a} + A\vec{b} = A(\vec{a} + \vec{b})$ が成り立つことを確認せよ.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とおいて, 式 (2.4) を証明せよ.

練習問題 3 上と同じ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}, \vec{b}$ を考える.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の場合と $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ の場合それぞれについて, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ で張られる正方形の面積と $A\vec{e}_1, A\vec{e}_2$ で張られる平行四辺形の面積の比を求めよ. $\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積と $A\vec{a}, A\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積の比も求めよ.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ として, $\vec{x}, \vec{y}$ で張られる平行四辺形と $A\vec{x}, A\vec{y}$ で張られる平行四辺形の面積比を求めてみよう.

さて (2.1) を 2 つ並べたものを次のように組み合わせることで, 2×2 行列同士のかけ算を定義しよう.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar + bs \\ cr + ds \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq & ar + bs \\ cp + dq & cr + ds \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

これは次のような性質を持っている. 点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ をまず $\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$ で移動し, 次に $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で移動させた結果を計算すると

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} px + ry \\ qx + sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(px + ry) + b(qx + sy) \\ c(px + ry) + d(qx + sy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ap + bq)x + (ar + bs)y \\ (cp + dq)x + (cr + ds)y \end{bmatrix}$$

となり, この右辺を見ると, 上のかけ算の定義で出てきた式が現れる. つまり,

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \text{で移動}} & \begin{bmatrix} px + ry \\ qx + sy \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{で移動}} \begin{bmatrix} (ap + bq)x + (ar + bs)y \\ (cp + dq)x + (cr + ds)y \end{bmatrix} \\ & \searrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \text{で移動} & \\ & & \end{array}$$

点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ をまず 2×2 行列 A で移動し, 次に 2×2 行列 B で移動させることは, 2×2 行列のかけ算 $A \cdot B$ で移動させることと等しい. (2×2 行列のかけ算 (2.5) は自然に定義されている.)

(2.6)

この「平面上の点の移動」=「 2×2 行列のかけ算」には, 通常の数のかけ算とは異なる性質がある. そのひとつとして, 点の移動は, 移動させる順番を変えると結果が変わる. つまり, 2×2 **行列同士のかけ算 (2.5) は, 行列の順番を入れ替えると結果が変わる**. 最後にこのことを練習問題で確認してみよう.

練習問題 4

(1) (2.2),(2.3),(2.6) を使って次の計算をせよ. 点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を, まず原点を中心として反時計周りに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させてから, 直線 $y = \sqrt{3}x$ に関して線対称に移動させた点の座標を求めよ. また, まず直線 $y = \sqrt{3}x$ に関して線対称に移動させてから, 原点を中心として反時計周りに $\frac{2}{3}\pi$ 回転させた点の座標を求めよ. 両者が一致しないことを確認せよ.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ のとき, (2.5) に従って $A \cdot B$ と $B \cdot A$ をそれぞれ計算し, $A \cdot B \neq B \cdot A$ であることを確認せよ.

注意: この資料で述べた「 2×2 行列とベクトルの積」(2.1) は, 2×2 行列を左から掛けることが, 平面から平面への写像を与えることを述べており, (2.6) はこの写像の合成が 2×2 行列の掛け算 (2.5) と整合的であることを述べている.