

空間図形（直線と平面の式） (by 山田)

課題の解答例

- 1 原点 O から直線 l に下ろした垂線の足 K の座標と原点と直線 l の距離.

[解法 1] l 上に点 K を取り $OK \perp \vec{v}_l$ ($\vec{v}_l$ は l の方向ベクトル) の条件から点 K を求める.

直線 l 上に点を取るため $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1} \equiv t$ とおく. $K(2t, t-4, t+4)$. 一方, l の方向

ベクトル $\vec{v}_l$ として ${}^t(2, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\vec{OK} \perp \vec{v}_l$ となる条件を内積で求める.

$$2t \cdot 2 + (t-4) \cdot 1 + (t+4) \cdot 1 = 0, \quad t = 0.$$

よって 垂線の足 K は $(0, -4, 4)$. 距離は $4\sqrt{2}$

途中から 「 $\|\vec{OK}\|^2$ が最小」 となる t に対する点として解いても良い.

$$(2t)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 6t^2 + 32$$

[解法 2] 点 K は 原点 O を含み l の方向ベクトル $\vec{v}_l$ を法ベクトルにもつ平面と l との交点. l の方向ベクトル $\vec{v}_l$ として ${}^t(2, 1, 1)$. これを法ベクトルにもち原点 O を通る平面は $2x + y + z = 0$. これと直線 l の交点を求める. l 上に点を取るため $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1} \equiv t$ とおくと $K(2t, t-4, t+4)$. $2x + y + z = 0$ に代入して

$$2t \cdot 2 + (t-4) \cdot 1 + (t+4) \cdot 1 = 0, \quad t = 0.$$

よって垂線の足 K は $(0, -4, 4)$. 距離は $4\sqrt{2}$.

- 2 2 直線 l と m の最短距離を与える l 上の点 P と m 上の点 Q の座標.

l の方向ベクトル $\vec{v}_l$ として ${}^t(2, 1, 1)$, m の方向ベクトル $\vec{v}_m$ として ${}^t(1, 2, 3)$.

[解法 1] l 上に点 P, m 上に点 Q をとり, 条件 $\vec{PQ} \perp \vec{v}_l$ かつ $\vec{PQ} \perp \vec{v}_m$ を解く.

直線 l 上に点を取るため $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1} \equiv t$ とおく. $P(2t, t-4, t+4)$.

直線 m 上に点を取るため $\frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-9}{3} \equiv s$ とおく. $Q(s+5, 2s+7, 3s+9)$.

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \begin{bmatrix} s+5 \\ 2s+7 \\ 3s+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2t \\ t-4 \\ t+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-2t+5 \\ 2s-t+11 \\ 3s-t+5 \end{bmatrix}$$

$\vec{PQ} \perp \vec{v}_l$ (l の方向ベクトル $\vec{v}_l$ として ${}^t(2, 1, 1)$) と $\vec{PQ} \perp \vec{v}_m$ (m の方向ベクトル $\vec{v}_m$ として ${}^t(1, 2, 3)$) を内積で解く. 「 $\vec{PQ}$ が外積 $\vec{v}_l \times \vec{v}_m$ と平行」 から解いても良い.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_l = \begin{bmatrix} s-2t+5 \\ 2s-t+11 \\ 3s-t+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7s - 6t + 26 = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_m = \begin{bmatrix} s-2t+5 \\ 2s-t+11 \\ 3s-t+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 14s-7t+42=0$$

$$\text{連立方程式} \quad \begin{cases} 7s-6t+26=0 \\ 14s-7t+42=0 \end{cases} \quad \text{を解くと } s=-2, t=2.$$

$$\text{このとき} \quad \boxed{P(4, -2, 6), \quad Q(3, 3, 3)}$$

[解法2] l 上に点P, m 上にも点Qをとり, 条件 $\|\overrightarrow{PQ}\|^2$ が最小」から解く. 途中まで同じ.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= {}^t(s-2t+5, 2s-t+11, 3s-t+5) \\ \|\overrightarrow{PQ}\|^2 &= (s-2t+5)^2 + (2s-t+11)^2 + (3s-t+5)^2 \\ &= 14s^2 - 14st + 6t^2 + 84s - 52t + 171 \\ &= 14\left(s - \frac{t-6}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}(t-2)^2 + 35 \end{aligned}$$

$t=2, s=-2$ で最小値 35 をとる. $P(4, -2, 6), \quad Q(3, 3, 3)$. ちなみに偏微分を使うと

$$\frac{\partial \|\overrightarrow{PQ}\|^2}{\partial t} = -14s + 12t - 52 = -2(7s - 6t + 26), \quad \frac{\partial \|\overrightarrow{PQ}\|^2}{\partial s} = 28s - 14t + 84 = 2(14s - 7t + 42)$$

解法1で登場した連立方程式との関係が見える.

3 平面 π と z 軸のなす角 φ について $\sin \varphi$ の値.

平面 π の**法**ベクトルとして $\vec{v}_\pi = {}^t(6, 3, 2)$. z 軸の方向ベクトルとして $\vec{e}_3 = {}^t(0, 0, 1)$.

ベクトルの内積の、長さとなす角 θ の公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$ から, $\vec{v}_\pi$ と $\vec{e}_3$ のなす角を θ とすると

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \cdot 1 \cdot \cos \theta$$

$\cos \theta = \frac{2}{7}$. $\cos$ が正なので θ は鋭角 (もし鈍角だったら法ベクトルの向きを逆向きにしてやり直すと良い). 問われたのは平面と直線のなす角 φ であって, これは平面 π の**法**ベクトル

と直線のなす角 θ とは $\theta + \varphi = 90^\circ$ の関係となる. $\sin \varphi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta = \boxed{\frac{2}{7}}$