

空間図形（直線と平面の式）（by 山田）

高校までの数学で、 xy 平面内の直線や関数のグラフ、2 次曲線などを数式（方程式）で表現する方法を学んだ。ここでは xyz 空間内の直線と平面の表示方法と基本的な扱い方について紹介する。他の先生の資料とも共通する部分がある。

高校ではベクトルの成分を点の座標のように横に並べましたが、大学では**ベクトルの成分は縦に並べます**。理由は、成分が縦と横に並ぶ「行列」が導入され、行列とベクトルを組で考えるときに数式と計算がわかりやすくなるからです（と、わたくしは思っています）。このことは他の資料でうまく説明されています。また、ベクトルの記号は電通大の教科書に合わせて、 $\vec{a}$ の代わりに太文字 $\mathbf{a}$ にします。

ここでは説明しませんが、行列の理論から 1 つだけ記号を導入します。

記号：(2 × 2 行列の行列式) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ とする。

1 外積・ベクトル積

空間図形の数学において、ベクトルの長さ・角度（特に直角）を調べるために内積 ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) がとても有効だった。ここでは内積に次いで有効な演算「外積（ベクトル積）」を紹介しよう。

1 定義 $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して、次のベクトルを

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積（ベクトル積）とよび $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

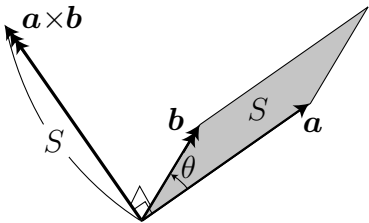
覚え方

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{matrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(3) \\ \dots(1) \\ \dots\dots\dots(2) \end{matrix}$$

例： $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix}$ 。

2 幾何的性質 下の 3 つの性質で $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は特徴つけられる。

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の方向は、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に直交する
- (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とで定まる平行四辺形の面積 S である
- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ がこの順に右手系



「右手系」とは、3 つのベクトルの位置関係について、第 3 のベクトルが第 1, 第 2 に対して「どちら側」かという意味の言葉です。親指を $\mathbf{a}$, 人差し指を $\mathbf{b}$ に合わせて $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を中指に合わせようとしたとき、左か右どちらの手での指の配置に合うか、という意味です。

3 外積に関する公式

- (1) [線形性] $(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = c_1(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + c_2(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}).$
 $\mathbf{a} \times (d_1 \mathbf{b}_1 + d_2 \mathbf{b}_2) = d_1(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1) + d_2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2).$
- (2) [交代性] $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$ 特に, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$
- (3) [ラグランジュの公式] $\mathbf{v}$ の長さを $\|\mathbf{v}\|$, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると
 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta)^2.$
- (4) [結合法則をみたさない] 一般に $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$

例: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$ 一方 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

2 平面の式・直線の式

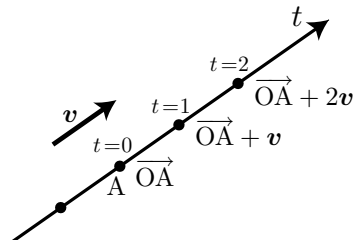
直線の式: 点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通る, 方向ベクトル $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の直線の式

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad (= t)$$

ただし v_1, v_2, v_3 の中に 0 がある場合は式を変形する.

[考え方] その直線は $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\mathbf{v} \quad (t \in \mathbb{R})$ と表せる点 $X(x, y, z)$ の集合である. 空間内に点 A を原点にして $\mathbf{v}$ を 1 とする数直線 (t 軸) が現れることになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + tv_1 \\ a_2 + tv_2 \\ a_3 + tv_3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t = \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \end{aligned}$$



注意 1. v_1, v_2, v_3 の中に 0 がある場合は式を変形する.

例: $\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-2}{3}$ とはせず $\frac{x-6}{1} = \frac{z-2}{3}, y=4$ と変形する.

式に等号が2つあるので 左辺・中辺・右辺 と呼ぶ. 上の例では「分母が0」は許されないから中辺は削除されるが, 「左辺=右辺」の関係は残り, 中辺の情報 ($y = a_2 + tv_2$ で $v_2 = 0$ なので $y = a_2$ となる) も残す. なお, この直線は方向ベクトルの y 成分 v_2 が0なので, 直線上で y 座標が一定で, その値が4なのである. この直線は xz 平面 (式は $y=0$) と平行な平面 $y=4$ に含まれる.

例: $\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-2}{0}$ は $y=4, z=2$ と変形する.

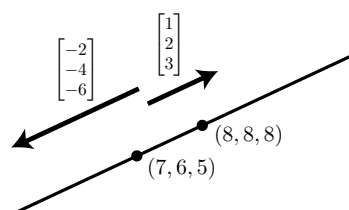
この直線上で y, z 座標は一定. x 軸 (式は $y=z=0$) と平行である.

注意 2. 見た目の異なる式が同一の直線を表すことがある.

例: $\frac{x-7}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-5}{3}$ と
 $\frac{x-8}{-2} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-8}{-6}$ は

同じ直線.

右の図を見て理由を考えてください.



平面の式: 点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を含む, 法ベクトル $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の平面の式

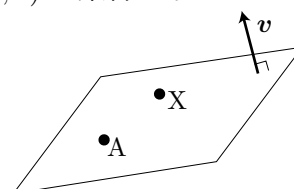
$$v_1(x - a_1) + v_2(y - a_2) + v_3(z - a_3) = 0$$

$$\text{変形すると } v_1x + v_2y + v_3z = v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3$$

[考え方] その平面は $\mathbf{v} \perp \overrightarrow{AX}$ つまり $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ となる点 $X(x, y, z)$ の集合である.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1(x - a_1) + v_2(y - a_2) + v_3(z - a_3) = 0$$



3 基本的な問題

空間内の直線や平面の位置関係などについての初等的な問題を列举してみる. 状況を想像して, かつ, 考えながら読んでほしい. 例えば (A1) 「3 点を含む平面の式を求める」は, 数学の問題としては「3 点の座標が与えられたとき, その 3 点を含む平面の式を求める」に対応する.

- (A1) 3 点を含む平面の式を求める
- (A2) 平面と直線が交わるとき, 交点の座標を得る
- (A3) 直線とその上にない点から, それらを含む平面を得る
- (A4) 交わる 2 直線の交点の座標を得る
- (A5) 交わる 2 平面の交線の式を得る
- (A6) 交わる 2 直線 あるいは 平行な 2 直線が与えられたとき, それらを含む平面を得る
- (B1) 2 つの直線の位置関係を判断する: 一致 / 平行 / 交わる / ねじれの位置
- (B2) 2 つの平面の位置関係を判断する: 一致 / 平行 / 交わる
- (B3) 直線と平面の位置関係を判断する: 含まれる / 平行 / 交わる
- (C1) 「点と直線の距離」を求める
- (C2) 「点と平面の距離」を求める
- (C3) 平行な 2 直線 または 2 平面の「幅」を求める
- (C4) ねじれの位置の 2 直線の「最短距離」を求める
- (C5) 交わる 直線と平面 のなす角 を求める
- (C6) 交わる 2 平面のなす角 を求める
- (D) ねじれの位置の 2 直線の式から「最短距離を与える 2 点」の座標を求める

(C2) には公式がある.

点と平面の距離の公式 点 (x_0, y_0, z_0) と 平面 $ax + by + cz = d$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

[考察] 点が平面上にあれば距離は 0. 公式の分子が 0 になることと対応している.

4 実践編

【問1】 (A1) 3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ を含む平面 π の式を求めよ.

解説: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ が法ベクトル (の1つ). 点 A を含んでいるから

公式で $6(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0$. 整理して (答) $6x + 3y + 2z = 6$

この平面の式は $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ と表示しておくとも確認しやすい. (図を描いてみよ)

【問2】 (A2) 原点 O から前問の平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

解説: 垂線の方法ベクトルは平面の法線ベクトルと平行. 原点を通るので直線の式として $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = t$. 直線上の点は $(t, 2t, 3t)$ と表せる. このうち平面 π にある点を求めるため平面の式に代入して $6t + 3(2t) + 2(3t) = 6$. 解いて $t = \frac{1}{3}$. (答) $H(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

【問3】 (C4) ねじれの位置の2直線 l と m の最短距離を求めよ.

$$l: \frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1}, \quad m: \frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-9}{3}$$

解説: 最短距離を与える l, m 上の点を求めなくて良い場合は, 次の方法が早い.

(1) l を含み, m と平行な平面 α の式を求める

(2) m 上の点と平面 α の距離を求める

(1) 平面 α の法ベクトルは, 2直線 l, m の方向ベクトル $\vec{v}_l, \vec{v}_m$ のどちらとも垂直.

そのようなベクトルは外積で求められる: $\vec{v}_l \times \vec{v}_m = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

α は l を含み l 上に点 $(0, -4, 4)$ があるので α の式は

$$(x-0) - 5(y+4) + 3(z-4) = 0, \quad \text{整理して} \quad x - 5y + 3z = 32.$$

(2) l 上に点 $(5, 7, 9)$ があるので l から α への距離は $\frac{|5 - 5 \cdot 7 + 3 \cdot 9 - 32|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \sqrt{35}$. (答) $\sqrt{35}$

課 題

1 原点 O から問3の直線 l に下ろした垂線の足 K の座標を求め, 原点と直線 l の距離を求めよ.

2 問3の2直線 l と m の最短距離を与える l 上の点 P と m 上の点 Q の座標を求めよ.

3 問1の平面 π と z 軸のなす角を φ とする. $\sin \varphi$ の値を求めよ.