

「微分方程式への誘い」の問の解答例

問 1 (i) a は定数なので, $\frac{dx}{dt} = a$ の両辺をそれぞれ t で積分すると

$$x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int a dt = at + C_0 \quad (C_0 \text{ はある定数})$$

逆に, C を任意の定数として, $x(t) = at + C$ の両辺をそれぞれ t で微分すると, $\frac{dx}{dt} = a$ となり, (1) をみたす. よって, (1) のすべての解は $x(t) = at + C$.

(ii) g は定数なので, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ の両辺をそれぞれ t で 2 回積分すると

$$\frac{dy}{dt} = \int \frac{d^2y}{dt^2} dt = \int (-g) dt = -gt + C_1 \quad (C_1 \text{ はある定数})$$

$$y(t) = \int \frac{dy}{dt} dt = \int (-gt + C_1) dt = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2 \quad (C_2 \text{ はある定数})$$

逆に, A, B を任意の定数として, $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B$ の両辺をそれぞれ t で 2 回微分すると, $\frac{dy}{dt} = -gt + A$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ となり, (2) をみたす. よって, (2) のすべての解は $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B$.

問 2 [1] $\frac{dy}{dx} - xy = 0$ の両辺にそれぞれ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($\neq 0$) をかけると

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} y \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{dy}{dx} - xy \right) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

よって, 平均値の定理から, ある定数 C_0 が存在して

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y(x) = C_0 \quad \therefore y(x) = C_0 e^{\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

逆に, C を任意の定数として, $y(x) = C e^{\frac{x^2}{2}}$ の両辺をそれぞれ x で微分すると,

$$\frac{dy}{dx} = C x e^{\frac{x^2}{2}} = xy \text{ をみたす. よって, [1] のすべての解は } y(x) = C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

[2] $x \neq 0$ に対して, $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$ の両辺にそれぞれ $\frac{1}{x^2}$ をかけると

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} \right) = 0 \quad (x \neq 0)$$

そこで, この両辺を x で積分すると, ある定数 C_0 が存在して

$$\frac{y(x)}{x^2} = C_0 \quad \therefore y(x) = C_0 x^2 \quad (x \neq 0)$$

逆に, C を任意の定数として, $y(x) = C x^2$ ($-\infty < x < \infty$) の両辺をそれぞれ x で微分すると, $\frac{dy}{dx} = 2Cx$ より, $x \frac{dy}{dx} = 2Cx^2 = 2y$ となり, [2] をみたす. よって, [2] のすべての解は

$$y(x) = C x^2.$$

問 3 $S > 0$ で定義されていることに注意しておく. 問 2 と同様に, $\frac{dR}{dS} - \frac{n}{S}R = 0$ とみて,

この両辺にそれぞれ $\frac{1}{S^n}$ をかけると

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{R}{S^n} \right) = \frac{1}{S^n} \left(\frac{dR}{dS} - \frac{nR}{S} \right) = 0 \quad (S > 0)$$

よって, 平均値の定理から, ある正の定数 K が存在して

$$\frac{R(S)}{S^n} = K \quad \therefore R(S) = K S^n \quad (S > 0)$$

問4 (イ) $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} - x = -z - x$

(ロ) $\frac{dw}{dx} = -w$ も併せて考えると, $\frac{d}{dx}(z - w) = -(z - w) - x$ をみたすので, $z - w$ は

(イ) の微分方程式のある解である. オイラーの quick method の考えに従って, そのある解を x の多項式で選ぶ. 要するに, 未定係数法を利用する. $u(x)$ が x の1次多項式, つまり $u(x) = ax + b$ (a, b は定数) とすると, $\frac{du}{dx} = a$ より, $u(x)$ が (イ) の微分方程式の解であれば, $a = \frac{du}{dx} = -u(x) - x = (-a - 1)x - b$ をみたさないといけない. これを x の恒等式とみると, $0 = -a - 1, a = -b$ より, $a = -1, b = 1$ がわかり, $u(x) = -x + 1$ を得る. 一方, 再三繰り返すように, $\frac{dw}{dx} + w = 0$ の両辺にそれぞれ e^x ($\neq 0$) をかけると

$$\frac{d}{dx}(e^x w) = e^x \left(\frac{dw}{dx} + w \right) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

よって, C を任意の定数として, $w(x) = C e^{-x}$ と表される. 従って, 以上から,

$z(x) = w(x) + u(x) = C e^{-x} - x + 1$ を知る. 故に, $y(x) = \frac{e^x}{C + (1-x)e^x}$ が求める解である. ここで, $f(x) = (x-1)e^x$ ($-\infty < x < \infty$) を考えると, $f'(x) = x e^x$ で, $e^x > 0$ より, $f(x) \geq f(0) = -1$ ($-\infty < x < \infty$) をみたす. 特に, $C < -1$ ならば, $z(x) < 0$ より, $y(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義される. 他方, $C \geq -1$ ならば, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ なので, 中間値の定理から, ある実数 x_0 が存在して, $f(x_0) = C$ をみたす. つまり, $z(x_0) = 0$ となる. $-1 < C < 0$ ならば, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ より, このような実数 x_0 は丁度2個ある. $C = -1$ または $C \geq 0$ ならば, このような実数 x_0 は1つだけある. 特に, $C \geq -1$ の場合, $y(x)$ は $x \neq x_0$ なる実数 x で定義される. 例えば, $C = e^2$ のとき, $x_0 = 2$ に注意して, $y(x)$ のグラフを描いてみよ.

(ハ) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ なので, (ロ) から, $y(x) = \frac{1}{C e^{-x} + 1 - x}$ と書けることに注意すると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$