2020 年度 新入生応援資料

双曲線関数 (by 山田)

課題の解答例

$\boxed{1}$ $\cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y$ の証明

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\bigl\{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})\bigr\} \\
&= \frac{1}{4}\bigl\{(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y})+(e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y})\bigr\} \\
&= \frac{1}{4}(2e^{x+y}+2e^{-x-y}) \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \cosh(x+y)\ = \text{左辺}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ ・tanh の和公式 $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x\cdot\tanh y}$ の証明

(i)tanh の定義式から

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}} = \frac{(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y})}{(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})} \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}} \\
&= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{2e^{x+y}+2e^{-x-y}} = \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{e^{x+y}+e^{-x-y}} = \tanh(x+y)\ = \text{左辺}
\end{aligned}$$

(ii) sinh と cosh の公式から導く.

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y} \\
&= \frac{\dfrac{\sinh x}{\cosh x}+\dfrac{\sinh y}{\cosh y}}{1+\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\cdot\dfrac{\sinh y}{\cosh y}} = \frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\cdot\tanh y}
\end{aligned}$$

・tanh の微分公式の証明　(i)tanh の定義式から　商の微分公式を利用する.

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' &= \frac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} \quad = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\\ &= \frac{1}{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

(ii) sinh と cosh の公式から導く.　　$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を利用する.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)'\cdot\cosh x-\sinh x\cdot(\cosh x)'}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh x\cdot\cosh x-\sinh x\cdot\sinh x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x} \quad = \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 積和公式の導出

y の代わりに $-y$ を代入して $\cosh(-y)=\cosh y,\ \sinh(-y)=-\sinh y$ を利用すると

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cosh x\ \cosh y+\sinh x\ \sinh y\\ \cosh(x-y) &= \cosh x\ \cosh y-\sinh x\ \sinh y\end{aligned}$$

この両辺の 和，差 により

$$\begin{aligned}\cosh(x+y)+\cosh(x-y) &= 2\cosh x\ \cosh y\\ \cosh(x+y)-\cosh(x-y) &= 2\sinh x\ \sinh y\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\cosh x\ \cosh y &= \frac{1}{2}\{\cosh(x+y)+\cosh(x-y)\}\\ \sinh x\ \sinh y &= \frac{1}{2}\{\cosh(x+y)-\cosh(x-y)\}\end{aligned}$$

なお、

$$\sinh x\ \cosh y = \frac{1}{2}\{\sinh(x+y)+\sinh(x-y)\}$$

も成り立つ.

3 角関数の場合と “時々” 逆符号になるので注意が必要.