

双曲線関数 (by 山田)

3 角関数 $\sin, \cos, \tan$ と似た関係をもつ関数たち

指数関数 e^x 対数関数 $\log x$ や 3 角関数 $\sin, \cos, \tan$ は、高校で学ぶ最も重要な関数たちである。 e は「自然対数の底」である。これらは大学以上の高度な数学でも、あらためてより深く注目されることになる。特に、これら（に本当は複素数も加えたい）が絡み合う一大体系は、人類が発見する前から真実であった数学の美しさであり、顧みてそこに至った人類の叡智を感じる。ここでは、我流ながら、その一端を紹介したいと思う。

双曲線関数 $\sinh x$ および $\cosh x$ は、指数関数 e^t を用いて次のように定義される。

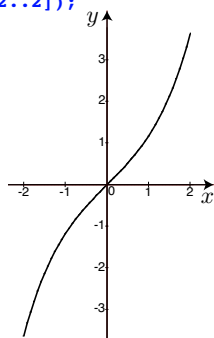
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$\sinh x, \cosh x$ の h までが関数の記号であることに注意してほしい。 $\sin hx$ ではない。マイナス乗は逆数を表すので $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ である。さて、 $\sinh x, \cosh x$ に

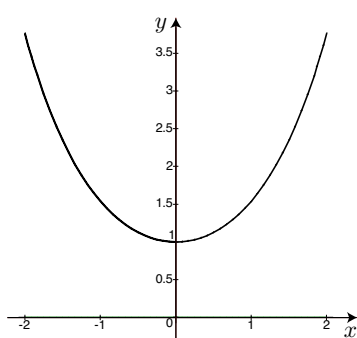
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

を加えて、まとめて **双曲線関数** という。グラフは下のようになる。数式処理ソフト Maple で作成。

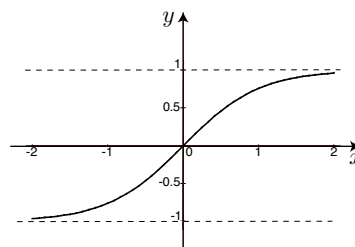
```
> plot([t, (exp(t)-exp(-t))/2, t=-2..2]); > plot([t, (exp(t)+exp(-t))/2, t=-2..2]); > plot([t, (exp(t)-exp(-t))/(exp(t)+exp(-t)), t=-2..2]);
```



$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$

双曲線の「双曲」が hyperbolic なので h なのだが、これを 3 角関数につけたのには理由がある。それを 1 つ 1 つ確かめてみよう。 h あり、 h なしに気をつけて読んでください。

1. 3 角関数と対応する双曲線関数の共通点. 対応がわかりやすいように配置すると

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \sin x &\text{は奇関数}, & \leftrightarrow & \sinh 0 = 0, & \sinh x &\text{は奇関数}, \\ \cos 0 &= 1, & \cos x &\text{は偶関数}, & \leftrightarrow & \cosh 0 = 1, & \cosh x &\text{は偶関数}. \end{aligned}$$

奇関数は $f(-x) = -f(x)$ の対称性をもつ関数、偶関数は $f(-x) = f(x)$ の対称性をもつ関数、のことである。それぞれ x^n の n が奇数、偶数の場合と対応する。

相違点もある。3 角関数の重要な性質として、円に由来する周期性があった。周期は 2π ($\tan$ は π) であった。 $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\tan(x+\pi) = \tan x$.

双曲線関数には周期性はない（実数では）． $\sinh x$ は実数全体で単調増加， $\cosh x$ は $x = 0$ で極小値 1 をとる． $\tanh x$ は実数全体で定義されて単調増加であるが， $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$ である．

2. 双曲線関数の間の関係式． $\cos x$ と $\sin x$ の間には，3 平方の定理に由来する関係式があった．

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

双曲線関数 $\cosh x, \sinh x$ の間には，これと似ているが **逆符号** の関係式が成り立つ．

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

この式 (3) は次のように確認することができる

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

ここで $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ を用いた．この逆符号は $\tan$ を含む次の公式にも遺伝する．

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \leftrightarrow \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

3. 「双曲線関数」と呼ぶ由来． 媒介変数を t ($t \in \mathbb{R}$) として， $(\cos t, \sin t)$ の表す曲線は半径 1 の円である（式 (2)）．これはむしろ 3 角関数 $\sin, \cos$ の定義と言ってもいいほど明らかな事実である．一方， $(\cosh t, \sinh t)$ の表す曲線は，左右に分かれた双曲線の右半分である（式 (3)）．

4. 和公式・倍角公式． 3 角関数にはたくさんの公式があった．双曲線関数ではどうなるだろうか．まず $\sin$ と $\sinh$ の和公式を比較すると

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \leftrightarrow \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

この対応では 3 角関数の公式からの逆符号はない．h ありの方を確認してみよう．

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \{ (e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}) + (e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \} \\ &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \sinh(x+y) \end{aligned}$$

一方， $\cosh$ の和公式は $\cos$ の和公式から逆符号になる．

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \leftrightarrow \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (4)$$

和公式で $y = x$ の場合を考えれば倍角公式が得られる．3 角関数の場合と同じ．

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x & \leftrightarrow & \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \\
\cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 & \leftrightarrow & \cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x & & = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 1 - 2 \sin^2 x & & = 1 + 2 \sinh^2 x
\end{aligned}$$

$\cos$ と $\cosh$ の 2 つめ以降の等号は, それぞれ式 (2), (3) を利用すると良い.

5. 微積分. 双曲線関数 $\sinh, \cosh$ の微積分は, 定義式から簡単に確認できる.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \leftrightarrow \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

不定積分を積分定数を省略して書けば

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x \quad \leftrightarrow \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x$$

$\tan$ の微積分を思い出して, $\tanh$ の微積分と比較しておくと

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & \leftrightarrow & (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \\
\int \tan x \, dx &= -\log(\cos x) & \leftrightarrow & \int \tanh x \, dx = \log(\cosh x)
\end{aligned}$$

これらも定義式 (1) から商関数の微分や置換積分で確認することができる.

6. 微積分をもう少し. 半円の面積を $y = \sqrt{1-x^2}$ の定積分で求めると

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

ここでは置換積分 $x = \sin \theta$ を用いた.

これに対して, 逆符号 $y = \sqrt{1+x^2}$ の場合には $x = \sinh \theta$ を用いることができる. 不定積分なら

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 \theta} \cosh \theta \, d\theta = \int \cosh^2 \theta \, d\theta = \int \frac{\cosh 2\theta + 1}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{4} \sinh 2\theta + \frac{1}{2} \theta.
\end{aligned}$$

定積分, 例えば $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$ の場合には, 積分範囲に注意が必要である.

$$\sinh \theta = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \pm 1 \Leftrightarrow e^\theta - e^{-\theta} = \pm 2 \Leftrightarrow \theta = \log(\sqrt{2} \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

ここで $\theta = \log(\sqrt{2} \pm 1)$ は, $e^\theta = X (> 0)$ とおくと $e^{-\theta} = \frac{1}{e^\theta} = \frac{1}{X}$ となり, $X - \frac{1}{X} = \pm 2$ に X をかけて, 2 次方程式 $X^2 \mp 2X - 1 = 0$ の正の解 $X = \pm 1 + \sqrt{2}$ から得られる.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{4} \sinh 2\theta + \frac{1}{2} \theta \right]_{\log(\sqrt{2}-1)}^{\log(\sqrt{2}+1)} = \cdots = \sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)$$

最後の項は $\log$ の性質と $\sqrt{2}$ を含んだ分数式の有理化に関する計算で得られる.

$$\begin{aligned}\log(\sqrt{2}+1) - \log(\sqrt{2}-1) &= \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \log \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \log(\sqrt{2}+1)^2 \\ &= 2\log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

こうなると, 全数学力が試されているような気持ちになる. この他にも, 双曲線関数を知っていると積分方法の幅が広がる. 他の先生から提供される記事も参考にしてほしい.

7. 複素数への飛躍. 虚数単位を i とする. $e^{\pi i} = -1$ という式を見たことはないだろうか. 実は, 少し一般化して

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ここでは証明も説明もすべて省略するが, 最後に紹介だけしたい.

$$\cosh i\theta = \cos \theta, \quad \sinh i\theta = i \sin \theta$$

大学で学ぶ数学を楽しみにしてほしい.

課 題

[1] 第4節の $\sinh$ の和公式の証明を参考に, $\cosh$ の和公式 (4) を証明せよ.

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

[2] $\tanh$ の和公式 および 微分

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

を, 次の2つの方法で証明せよ.

(i) $\tanh$ の定義式 (1) から導く. (ii) $\sinh$ と $\cosh$ の公式から導く.

[3] 3角関数には積和公式があった. 2つ挙げると

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\}, \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

これらに対応する双曲線関数の積和公式 ($\sinh x \sinh y = \dots$, $\cosh x \cosh y = \dots$) を推測し, 証明せよ.

双曲線関数 (by 山田)

課題の解答例

□1 $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ の証明

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{1}{4} \{ (e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \} \\
 &= \frac{1}{4} \{ (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}) + (e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \} \\
 &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\
 &= \cosh(x+y) = \text{左辺}
 \end{aligned}$$

□2 $\cdot \tanh$ の和公式 $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$ の証明

(i) $\tanh$ の定義式から

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}}{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}} \\
 &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}} = \tanh(x+y) = \text{左辺}
 \end{aligned}$$

(ii) $\sinh$ と $\cosh$ の公式から導く.

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

から

$$\begin{aligned}
 \tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} \\
 &= \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 + \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh y}{\cosh y}} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}
 \end{aligned}$$

• $\tanh$ の微分公式の証明 (i) $\tanh$ の定義式から 商の微分公式を利用する.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' &= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}
 \end{aligned}$$

(ii) $\sinh$ と $\cosh$ の公式から導く. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を利用する.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' &= \frac{(\sinh x)' \cdot \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}
 \end{aligned}$$

3 積和公式の導出

y の代わりに $-y$ を代入して $\cosh(-y) = \cosh y$, $\sinh(-y) = -\sinh y$ を利用すると

$$\begin{aligned}
 \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
 \cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y
 \end{aligned}$$

この両辺の 和, 差 により

$$\begin{aligned}
 \cosh(x+y) + \cosh(x-y) &= 2 \cosh x \cosh y \\
 \cosh(x+y) - \cosh(x-y) &= 2 \sinh x \sinh y
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \cosh x \cosh y &= \frac{1}{2} \{ \cosh(x+y) + \cosh(x-y) \} \\
 \sinh x \sinh y &= \frac{1}{2} \{ \cosh(x+y) - \cosh(x-y) \}
 \end{aligned}$$

なお、

$$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2} \{ \sinh(x+y) + \sinh(x-y) \}$$

も成り立つ.

3 角関数の場合と “時々” 逆符号になるので注意が必要.