「曲線と積分の変数変換」の課題の解答例

大野　真裕

課題 1 曲線 C が $x = t^2$, $y = t^3$, $(0 \leqq t \leqq 1)$ と媒介変数表示されているとする．このとき，線積分

$$\int_C (x+y)\,dx + xy\,dy$$

を求めよ．

[解]

$$\int_C (x+y)\,dx + xy\,dy = \int_0^1 \{(t^2+t^3)2t + t^2 \cdot t^3 \cdot 3t^2\}dt = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{8}t^8\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{43}{40}.$$

課題 2 $x = \tan t$，$y = \dfrac{1}{\cos t}$ とするとき，$y^2 - x^2 = 1$ となることを示せ．

[解]

$$y^2 - x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1.$$