確率・統計

(2020 年度新入生用資料)

まず，高校で学習した統計学の復習をしよう．とる値が確率的に定まる変数を確率変数と呼んだ．そしてその中でとる値がとびとびのものを離散型確率変数といい，連続的な値をとるものを連続型確率変数と呼んだ．離散型確率変数としてはある地点をある時間内にとおるバスの台数，またはある電話にある時間内にかかってくる電話の回数などがあげられる．連続型確率変数としてはある日のある時刻における気温や川の水位が考えられる．以下，連続型確率変数について議論する．

1 高校の復習

定義 **1.1.** *(確率)*
確率変数 X が a 以上 b 以下である確率を次で記す．

$$P(a \leq X \leq b)$$

定義 **1.2.** *(確率密度関数)*
次を満たす関数 $f(x)$ を X の確率密度関数と言う．

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

定義 **1.3.** *(確率密度関数の性質)*
確率密度関数 $f(x)$ は次を満たす．

1.

$$f(x) \geq 0$$

2. X の取りうる値が $\alpha \leq X \leq \beta$ であるとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$$

次に期待値，分散について記す．確率変数 X を何回か復元抽出し，その平均を取る．この復元抽出の回数を増やしていくとある値に近づく．これが期待値である．確率変数 X の散らばり具合を表す値が分散である．

定義 **1.4.** 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$ は次で定義される．

1. $E(X) = \int_\alpha^\beta xf(x)dx$

2. $V(x) = \int_\alpha^\beta (x - E(X))^2 f(x)dx$

高校では連続型確率変数の分布として正規分布を学習したが，他の代表的な分布として次の一様分布がある．

例 **1.1.** 確率変数 X が確率密度関数 $f(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha} \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$ をもつとき，X は一様分布 $U(\alpha,\beta)$ に従うといい，$X \sim U(\alpha,\beta)$ と記す．$U(\alpha,\beta)$ の期待値と分散は次で与えられる．

$$E(X) = \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$$
$$V(X) = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

実際に自分で一様分布の期待値と分散を計算して確かめてみよう．

2　モーメント

確率変数 X の分布を知る重要な量としてモーメントがある．このモーメントを次で定義する．

定義 **2.1.**

1. 確率変数 X，実数 a，自然数 k に対し $E((X-a)^k)$ を X の a の周りの k 次モーメントと言う．

2. 0 の周りのモーメントを単に X のモーメントと言う．

次にモーメントを用い定義される歪度 (わいど)，尖度 (せんど) を紹介する．
歪度は，分布の歪みを表す量で，歪度が正の時は，左側に分布の山があり，０の時は分布は左右対称，負の時は右側に分布の山がある．
尖度は分布の尖り具合を表す量でこれが大きいほど分布の山が尖っている．

定義 **2.2.** 確率変数 X に対し，歪度，尖度を次で定義する．

1. 歪度：$\dfrac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$

2. 尖度：$\dfrac{E((X-\mu)^4)}{\sigma^4}$

(ここで $\mu = E(X)$，$\sigma^2 = V(X)$ とする．)

次に自分で次の問題を解いてみよう．

問題 **2.1.** 確率変数 X，Y はそれぞれ $X \sim U(0,2)$，$Y \sim U(-1,1)$ であるとする．この時，以下の問いに答えよ．

1. X の k 次モーメントを求よ．

2. Y の歪度，尖度を求めよ．